Tutorato Analisi I - 29/11/23

Calcolo di Integrali Indefiniti

Esercizio Calcolare $\int \frac{x^3}{1+3x^4}\,dx$.

Soluzione

E' un integrale immediato del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$:

Qualche Recap

Dalla formula $f'(g(x))\,g'(x) = (f\circ g)'(x)$

deduciamo $\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = (f\circ g)(x) + c$

- Nel caso di $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$, si ha

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int g'(x)\,\frac{1}{g(x)}\,dx = \int g'(x)\,\underbrace{f'(g(x))}\,dx = f(g(x)) + c$$

dove $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\left(f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)} \right)$.

Qual è una funzione $f(x)$ tale che $f'(x) = \frac{1}{x}$? $f(x) = \log|x|$

Quindi $\int g'(x)/g(x)\,dx = \log|g(x)| + c$.

non dimenticate il valore assoluto!

Le funzioni in esame sono x^3, $b(x) = 1+3x^4$.

Osserviamo che $b'(x) = 12x^3$, quindi:

$$\int \frac{x^3}{1+3x^4}\,dx = \int \frac{1}{12}\,\frac{12x^3}{1+3x^4}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{(1+3x^4)'}{1+3x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}\log|\underbrace{1+3x^4}_{>0}| + c = \frac{1}{12}\log(1+3x^4) + c$$

FORMULA per integrali (immediati) del tipo $\int f'(x)\,[f(x)]^{\alpha}\,dx$:

$$\int f'(x)\,[f(x)]^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \\ \log|f(x)| + c, & \alpha = -1 \end{cases}$$

Qualche osservazione

- Se $\alpha \neq -1$, si ha:

$$\left([f(x)]^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)[f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)$$

da cui (integrando):

$$\int \underbrace{(\alpha+1)}_{\text{costante } (\neq 0)}\, [f(x)]^{\alpha}\, f'(x)\,dx = \int \left([f(x)]^{\alpha+1}\right)' dx = [f(x)]^{\alpha+1} + c$$

$$\Rightarrow \int [f(x)]^{\alpha}\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$\frac{c}{\alpha+1}$, ma non cambia...

- Se invece $\alpha = -1$ troviamo il caso precedente

$$\int f'(x)\,[f(x)]^{-1}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

Vediamo altri esempi di integrali immediati:

Esercizio $\displaystyle\int \frac{2x^2}{7+6x^3}\,dx$

Soluzione

$$(7+6x^3)' = 18x^2$$

$$\int \frac{2x^2}{7+6x^3}\,dx = \frac{1}{9}\underbrace{\int \frac{18x^2}{7+6x^3}\,dx}_{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx} = \frac{1}{9}\log|7+6x^3| + c$$

Esercizio $\displaystyle\int \cos x \cdot \sin x\,dx$

Soluzione

$$\int \cos x\cdot\sin x\,dx = \int \underbrace{(\sin x)'}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\underbrace{\sin x}_{f(x)}}_{[f(x)]^1}\,dx = \underbrace{\frac{(\sin x)^2}{2}}_{\frac{[f(x)]^2}{2}} + c$$

- Modo 2 : Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

$$\int \cos x\cdot\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(-\cos(2x))'\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

è lo stesso di prima, infatti:

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= -\frac{1}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x) + c = -\frac{1}{4}(1-\sin^2 x - \sin^2 x) + c =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(2\sin^2 x) + \underbrace{c} = \frac{\sin^2 x}{2} + \underbrace{c'}$$

Esercizio $\int \tan x \, dx$

Soluzione

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx =$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

Esercizio $\int \frac{\log^2(x)}{x} \, dx$

Soluzione

$$\int \frac{\log^2(x)}{x} \, dx = \int (\log x)' (\log(x))^2 \, dx = \frac{(\log(x))^3}{3} + c$$

- Modo 2 : INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$t = \log x \rightsquigarrow dt = \frac{dx}{x}$

$x = e^t \rightsquigarrow dx = e^t \, dt$

$df = f'(x) \, dx$

$$\int \frac{\log^2 x}{x} \, dx = \int \frac{t^2}{\cancel{e^t}} \cancel{e^t} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c$$

Ora dobbiamo Tornare alla variabile x :

$t = \log x$

$$= \frac{\log^3 x}{3} + c$$

Esercizio $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

Soluzione

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Cerco $a, b \in \mathbb{R}$ tali che valga l'uguaglianza (per ogni $x \neq \pm 1$)

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} \overset{\text{vogliamo}}{=} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

a, b sono costanti che NON dipendono da x

$\Rightarrow$ Imponiamo $a(x+1) + b(x-1) = 1$

$$\underbrace{(a+b)}_{=0}x + \underbrace{a-b}_{=1} = 1$$

(l'uguaglianza deve valere per ogni $x \neq \pm 1$)

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1| + c\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{|x-1|}{|x+1|} + \underbrace{\frac{1}{2}c}_{\text{“}=c\text{”}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \quad \left(= \log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + c\right)$$

Esercizio $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

Soluzione

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b+cx}{x^2+x+1}$$

Perché? Se provo solo con $\frac{b}{x^2+x+1}$ trovo

$$\underbrace{a}_{=0}x^2 + \underbrace{(a+b)}_{=0}x + \underbrace{a-b}_{=1} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -a = 0 \end{array} \quad e \quad a-b = 0 \neq 1$$

⇝ NON FUNZIONA!

da cui come prima

$$a(x^2+x+1) + (b+cx)(x-1) = 1$$

e riordinando i termini:

$$\underbrace{(a+c)}_{=0}x^2 + \underbrace{(a+b-c)}_{=0}x + \underbrace{a-b}_{=1} = 1$$

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ a+b-c = 0 \\ a-b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ a = b+1 \\ a = c-b = -a-a+1 = -2a+1 \end{cases}$$

Dall'ultima: $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$$b = -\frac{2}{3}$$

$$c = -\frac{1}{3}$$

Sostituendo con gli a, b, c trovati (e mettendo in evidenza $\frac{1}{3}$):

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2+x}{x^2+x+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log|x-1| - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx\right)$$

$+C$ NON NECESSARIA perché si somma alla $+C$ del secondo integrale

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$(x^2+x+1)' = 2x+1$$

Cerchiamo di ricondurre il numeratore alla derivata del denominatore

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Resta solo quest'ultimo integrale da calcolare

Calcoliamo infine $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

- TECNICA STANDARD in questi casi: COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

Vogliamo scrivere $x^2+x+1 = (ax+b)^2+c$

"impongo" il doppio prodotto

aggiungo (e sottraggo) ciò che manca per il quadrato di un binomio

$$x^2+x+1 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Quindi $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$

Vogliamo ricondurci a $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) + c$

Sostituzione $y = x+\frac{1}{2}$, $dx = dy$

perché...

$$= \int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$$

vorremmo 1, quindi raccogliamo $\frac{3}{4}$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}y^2+1\right)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\frac{4}{3}y^2+1}\,dy =$$

vorremmo t^2, cioè $t^2 = \frac{4}{3}y^2$, quindi effettuiamo la sostituzione:

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}y \rightsquigarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\arctan(t) + c$$

Da t dobbiamo tornare a x

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} y \underset{y = x + \frac{1}{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} (x + 1/2)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right) + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

In conclusione:

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx\right) =$$

$x^2+x+1 > 0$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\log|x-1|}_{\frac{1}{6}\log(x-1)^2} - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{6}\log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Esercizio "per casa": calcolare $\int \frac{1}{x^4 - 1} \, dx$.

[Soluzione: $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + c$]